ОБРАБОТКА ГРАФИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

Написать реферат на тему: Программы для создания 3D-изображений.

СИСТЕМНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Выполнить 4 и 5 задания курса HTMLAcademy

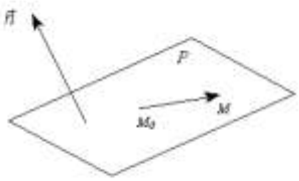
ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

- **Записать конспект в тетрадь и решить в конце задание**.

Уравнение плоскости в пространстве.

Пусть P – произвольная плоскость в пространстве. Всякий перпендикулярный ей ненулевой вектор называется *вектором нормали* к этой плоскости.

Если известна какая-нибудь точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ плоскости P и какой-нибудь вектор $\vec{n} = (A; B; C)$ нормали к ней, то этими двумя условиями плоскость в пространстве вполне определена (через данную точку можно провести единственную плоскость, перпендикулярную данному вектору).



Чтобы получить уравнение плоскости, заданной этими условиями, возьмем на плоскости P произвольную точку M с переменными координатами x, y, z. Эта точка принадлежит плоскости только в том случае, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярен вектору $\vec{n}$, а для этого необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение этих векторов равнялось нулю, т. е. $(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$.

Вектор $\vec{n} = (A; B; C)$ задан по условию, найдем координаты вектора $\overrightarrow{M_0M}$: $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ и выразим скалярное произведение этих векторов в координатной форме. $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. (*).

Так как точка $M(x; y; z)$ выбрана на плоскости произвольно, то последнему уравнению удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на плоскости P. Для точки N, не лежащей на заданной плоскости, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0N} \neq 0$ и равенство (*) нарушается. Следовательно, уравнение (*) определяет плоскость, проходящую через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и перпендикулярную вектору $\vec{n} = (A; B; C)$.

Пример 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2; -3; 1)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n} = (5; 1; -4)$.

Решение. Используя формулу (*), имеем $5(x - 2) + 1(y + 3) - 4(z - 1) = 0$,

откуда после преобразований получим $5x + y - 4z - 3 = 0$.

Искомое уравнение оказалось выраженным общим уравнением первой степени относительно переменных координат x, y, z произвольной точки плоскости. Ниже мы убедимся, что всякое уравнение первой степени относительно x, y, z определяет плоскость в $\mathbf{R}^3$.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Пусть даны три точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$. Если точки не лежат на одной прямой, то через них всегда можно провести единственную плоскость. Обозначим (x, y, z) координаты произвольной точки M пространства и рассмотрим три вектора: $M_1M(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)$, $M_1M_2(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$, $M_1M_3(x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1)$. Точка M лежит на плоскости $M_1M_2M_3$ в том и только том случае, когда перечисленные три вектора компланарны, а значит определитель составленный из их координат равен нулю.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки: A(3,-1,2), B(4, -1, -1) и C(2, 0, 2).

Решение. Пусть M(x,y, z) – произвольная точка плоскости, тогда векторы AM(x-3, y+1, z-2); AB(1, 0, -3); AC(-1, 1, 0) компланарны, поэтому:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель по правилу треугольника, получим:

z-2 +3(y + 1) +3(x – 3) = 0, или z + 3y + 3x = 8.

Теорема 1. *В пространстве* $\mathbf{R}^3$ *всякая плоскость выражается уравнением первой степени* $Ax+By+Cz+D=0$.

Доказательство. В предыдущем пункте было установлено, что всякая плоскость может быть задана уравнением вида (*): $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

Раскрыв скобки и обозначив $-Ax_0-By_0-Cz_0=D$, получим общее уравнение первой степени относительно *x, y, z:* $Ax+By+Cz+D=0$, эквивалентное уравнению (*). Поэтому оно определяет ту же плоскость, что и уравнение (*), и называется *общим уравнением плоскости*. Коэффициенты при переменных в этом уравнении сохраняют тот же геометрический смысл, что и в равенстве (*), т. е. являются координатами вектора $\vec{n}=(A;B;C)$ нормали к плоскости. Так как вектор нормали к плоскости является ненулевым, то коэффициенты *A, B* и *C* не могут быть одновременно равны нулю. Итак, мы доказали, что всякая плоскость в $\mathbf{R}^3$ определяется уравнением первой степени относительно переменных координат *x, y, z*.

Теорема 2 (обратная). *Всякое линейное уравнение с тремя переменными* $Ax+By+Cz+D=0$ *определяет плоскость в пространстве* $\mathbf{R}^3$, *если хотя бы один из коэффициентов при переменных не равен нулю.*

Доказательство. Пусть x_0, y_0, z_0 – какое-либо решение данного уравнения. Тогда $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, откуда $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$. Подставляя в данное уравнение вместо *D* его значение и группируя члены, получим

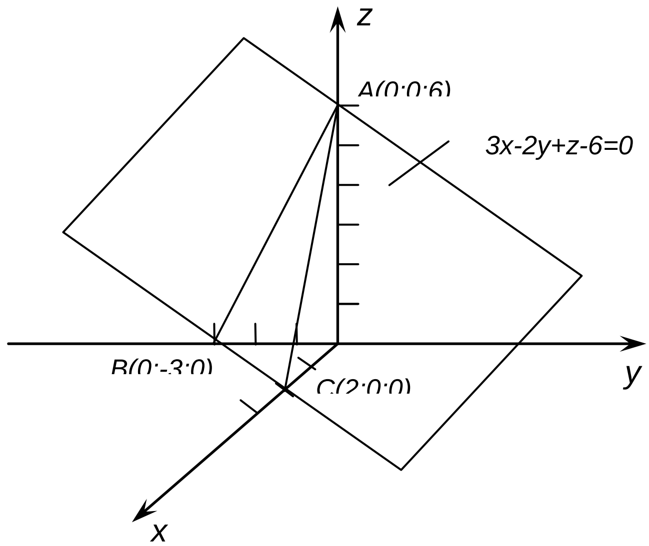
$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Это уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и имеющей вектор нормали $\vec{n}=(A;B;C)$. Следовательно, и равносильное ему уравнение $Ax+By+Cz+D=0$ определяет плоскость [перпендикулярную вектору $\vec{n}=(A;B;C)$].

Пример 3. Построить в прямоугольной декартовой системе координат плоскость, заданную уравнением $3x - 2y + z - 6 = 0$.

Решение. Для построения плоскости необходимо и достаточно знать какие-либо три ее точки (не лежащие на одной прямой), например точки пересечения плоскости с осями координат. Полагая в заданном уравнении $x = y = 0$, получим $z = 6$. Следовательно, заданная плоскость пересекает ось Oz в точке A (0; 0; 6).

Аналогично, при $x = z = 0$ получим $y = -3$, т. е. точку B (0; - 3; 0); при $y = z = 0$ получим $x = 2$, т. е. точку C(2; 0; 0). По трем точкам A (0; 0; 6), B (0; - 3; 0), C (2; 0; 0) строим заданную плоскость .



P

Частные случаи общего уравнения плоскости. Рассмотрим особенности расположения плоскости в тех случаях, когда те или иные коэффициенты общего уравнения обращаются в нуль.

1. При $D = 0$ уравнение $Ax+By+Cz=0$ определяет плоскость, проходящую через начало координат, так как координаты точки O (0; 0; 0) удовлетворяют этому уравнению.

2. При $A = 0$ уравнение $By+Cz+D=0$ определяет плоскость, параллельную оси Ox, поскольку вектор нормали $\vec{n}=(0;B;C)$ этой плоскости перпендикулярен оси Ox (его проекция на ось Ox равна нулю). Аналогично, при $B = 0$ плоскость $Ax+Cz+D=0$ параллельна оси Oy, а при $C = 0$ плоскость $Ax+By+D=0$ параллельна оси Oz.

3. При $A = D = 0$ уравнение $By+Cz=0$ определяет плоскость, проходящую через ось Ox, поскольку она параллельна оси Ox (A =0) и проходит через начало координат (D =0). Аналогично, плоскость $Ax+Cz=0$ проходит через ось Oy, а плоскость $Ax+By=0$ - через ось Oz.

4. При $A = B = 0$ уравнение $Cz+D=0$ определяет плоскость, параллельную координатной плоскости xOy, поскольку она параллельна осям Ox (A =0) и Oy (B =0). Аналогично, плоскость $Ax+D=0$ параллельна плоскости yOz, а плоскость $By+D=0$ - плоскости xOz.

5. При $A = B = D = 0$ уравнение $Cz=0$ (или $z = 0$) определяет координатную плоскость xOy, так как она параллельна плоскости xOy ($A = B = 0$) и проходит через начало координат (D =0). Аналогично, уравнение $y = 0$ в пространстве определяет координатную плоскость xOz, а уравнение $x = 0$ - координатную плоскость yOz.

Пример 4. Составить уравнение плоскости P, проходящей через ось Oy и точку $M_0(2;-4;3)$.

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через ось *Oy*, имеет вид $Ax + Cz = 0$. Для определения коэффициентов *A* и *C* воспользуемся тем, что точка $M_0(2;-4;3)$ принадлежит плоскости *P*. Поэтому ее координаты удовлетворяют написанному выше уравнению плоскости: $M_0(2;-4;3) \in P \Leftrightarrow 2A + 3C = 0$, откуда $A = -1.5C$. Подставив найденное значение *A* в уравнение $Ax + Cz = 0$, получим : $-1.5Cx + Cz = 0$, или **3x – 2z = 0.**

Это и есть искомое уравнение.

<u>Задания для самостоятельного решения:</u>

1. Составить уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок, отсекаемый на оси Ох параболой $y = 9 + 2x - x^2$.
2. Построить эллипс $x^2 + 4y^2 = 4$ и параболу $x^2 = 6y$ и найти площадь трапеции, основаниями которой служат большая ось эллипса и общая хорда эллипса и параболы.
3. Написать уравнение параболы и ее директрисы, если парабола проходит через точки пересечения прямой $y = x$ и окружности $x^2 + y^2 + 6x = 0$ и симметрична относительно оси Ох.