ТЕХНОЛОГИЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ОБЩЕСЛЕСАРНЫХ РАБОТ

Описать и зарисовать инструменты для нарезания резьбы

http://www.stroitelstvo-new.ru/sudostroenie/sborka/narezanie-rezby.shtml

МАТЕМАТИКА

1. **Записать теоретический материал и разобрать примеры.**
2. **Выполнить упражнения.**

Предел функции

Пусть дана функция $y = x^2 - 4$ *(1)*.

О пределе функции можно говорить только при условии задания предела, к которому стремится ее аргумент x, без этого условия вопрос о пределе функции не имеет смысла.

Положим, что $x \to 3$ посмотрим, существует ли при этом условии предел данной функции и если существует, то какой.

Пусть в нашем примере x принимает такую последовательность значений:

$$3{,}1;\ 3{,}01;\ 3{,}001;\ 3{,}0001;\ \ldots \to 3;$$

тогда функция *(1)* получит соответственно значения:

$$5{,}6;\ 5{,}06;\ 5{,}006;\ 5{,}0006;\ \ldots \to 5.$$

Мы видим, что данная последовательность значений функции имеет предел, равный *5*.

Если в равенстве *(1)*аргументу дать значения:

$$2{,}9;\ 2{,}99;\ 2{,}999;\ 2{,}9999;\ \to 3,$$

то и в этом случае предел последовательности значений функции будет тот же, в чем легко убедиться соответствующими вычислениями.

Итак, функция *(1)* имеет предел при $x \to 3$,равный *5*.

Это записывается так:

$$\lim_{x\to 3}(x^2 - 4) = 5.$$

Показанный выше способ нахождения предела функции громоздок, поэтому на практике он не применяется.

<u>Определение предела функции.</u>

Пределом функции $y = f(x)$ *при* x *стремящемся к* a называется число b, к которому стремится значение самой функции при $x \to a$ и обозначается $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

<u>Теорема о единственности предела.</u>

Если функция $f(x)$имеет при x, стремящемся к a, то этот предел *единственный*.

Основные теоремы о пределах функций.

Приводим без доказательства следующие теоремы о пределах функций:

Теорема №1.

Если существуют пределы функции $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$, то существует так же и предел их суммы, равный сумме пределов функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

Теорема №2.

Если существуют пределы функции $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$, то существует так же и предел их произведения, равный произведению пределов функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$:

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x).$$

Теорема №3.

Если существуют пределы функции $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$ и предел функции $g(x)$ отличен от нуля, то существует так же и предел отношения (дроби), равный отношению пределов функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}, \text{ если } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0.$$

Следствия:

1. Постоянный множитель можно вынести за знак предела: $\lim\limits_{x\to a}(k\cdot f(x)) = k\cdot\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

2. $\lim\limits_{x\to a} x = a$.

3. $\lim\limits_{x\to a} c = c$.

4. Если *n*- натуральное число, то $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$, $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$.

Пример:

Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\left(5x^3+2x^2-3x+7\right)$. Используя теорему №1 и следствия, получим:

$$\lim_{x\to 2}\left(5x^3+2x^2-3x+7\right) = \lim_{x\to 2}5x^3 + \lim_{x\to 2}2x^2 - \lim_{x\to 2}3x + \lim_{x\to 2}7 = 5\lim_{x\to 2}x^3 + 2\lim_{x\to 2}x^2 - 3\lim_{x\to 2}x + 7 =$$
$$= 5\cdot 2^3 + 2\cdot 2^2 - 3\cdot 2 + 7 = 49$$

Таким образом, для вычисления предела функции $f(x)$ при $x \to a$, достаточно вместо переменной x подставить значение a, к которому она стремится, и выполнить соответствующие действия.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to -2}\left(3x^2-6x+9\right) = 3\cdot(-2)^2 - 6\cdot(-2) + 9 = 12+12+9 = 30$.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+1}{x-3}=\dfrac{2^2-2+1}{2-3}=\dfrac{4-2+1}{-1}=\dfrac{3}{-1}=-3$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{3x+5}=\dfrac{1-1}{3\cdot 1+5}=\dfrac{0}{8}=0$.

4. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{4x+9}{x^2-5}=\dfrac{4\cdot 5+9}{5^2-5}=\dfrac{29}{20}=1{,}45$.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Определение№1.

Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$.

Определение№2.

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$.

Отметим свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций.

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ - бесконечно малые при $x\to a$, то их сумма $f(x)+g(x)$ при $x\to a$ также является бесконечно малой.
2. Если функция $f(x)$- бесконечно малая при $x\to a$, а $F(x)$ - ограниченная функция, то их произведение $f(x)\cdot F(x)$, есть бесконечно малая величина.

Следствие. Произведение конечного числа бесконечно малых функций есть величина бесконечно малая.

3. Если функция $f(x)$ при $x\to a$ имеет конечный предел $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, функция $g(x)$- бесконечно большая, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=\infty$; $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$.
4. Если функция $f(x)$- бесконечно малая при $x\to a$, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ - бесконечно большая, т.е. $\dfrac{1}{0}=\infty$.
5. Если функция $f(x)$- бесконечно большая при $x\to a$, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая, т.е. $\dfrac{1}{\infty}=0$.

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{8x+1}{x-4}=\dfrac{8\cdot 4+1}{4-4}=\dfrac{33}{0}=33\cdot\dfrac{1}{0}=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-2x}{2x^2-5x}=\dfrac{3\cdot 0^2-2\cdot 0}{2\cdot 0^2-5\cdot 0}=\dfrac{0}{0}$.

Здесь пределы числителя и знаменателя при $x \to 0$ равны 0. Непосредственной подстановкой вместо аргумента его предельного значения вычислить предел нельзя, так как при $x \to 0$ получается отношение двух бесконечно малых величин.

Разложим числитель и знаменатель на множители, чтобы сократить дробь на общий множитель, стремящийся к нулю, и, следовательно, сделать возможным применение *теоремы №3*. Нужно иметь в виду, что здесь не производится сокращения на нуль, что недопустимо. По определению предела функции аргумент x стремиться к своему предельному значению, никогда не принимая этого значения. Поэтому до перехода к пределу можно произвести сокращение на множитель, стремящийся к нулю. Имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-2x}{2x^2-5x}=\left[\frac{0}{0}-\text{неопределенность}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(3x-2)}{x\cdot(2x-5)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x-2}{2x-5}=\frac{3\cdot 0-2}{2\cdot 0-5}=\frac{2}{5}.$$

Далеко не всякая подстановка предельного значения в функцию вместо независимой переменной может сразу привести к нахождению предела. Случаи, в которых подстановка предельного значения в функцию не дает значения предела, называют *неопределенностями*; к ним относятся неопределенности видов: $\left[\frac{0}{0}\right]$; $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$; $[\infty-\infty]$; $\left[0^0\right]$; $\left[\infty^0\right]$; $[0\cdot\infty]$. Устранить неопределенность удается часто с помощью алгебраических преобразований.

<u>Вычислить пределы:</u>

1. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}=\frac{3^2-5\cdot 3+6}{3\cdot 3^2-9\cdot 3}=\left[\frac{0}{0}\right]$;

Разложим в числителе квадратный трехчлен на линейные множители по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$, где x_1 и x_2 - корни трехчлена, а в знаменателе вынесем общий множитель за скобки, а затем сократим дробь на $(x-3)$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{3x(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)}{3x}=\frac{3-2}{3\cdot 3}=\frac{1}{9}$$

Ответ: $\frac{1}{9}$.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4x^2-7x-2}{x^2-4}=\frac{4\cdot 2^2-7\cdot 2-2}{2^2-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\frac{4\left(x+\frac{1}{4}\right)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{4\left(x+\frac{1}{4}\right)}{(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{4x+1}{(x+2)}=$

$\frac{4\cdot 2+1}{2+2}==\frac{9}{4}=2{,}25$

Ответ: $2{,}25$.

3. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{3x^2-17x+10}{3x^2-16x+5}=\frac{3\cdot 5^2-17\cdot 5+10}{3\cdot 5^2-16\cdot 5+5}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 5}\frac{3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-5)}{3(x-5)\left(x-\frac{1}{3}\right)}=\lim\limits_{x\to 5}\frac{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}=$

$\lim\limits_{x\to 5}\frac{3x-2}{3x-1}==\frac{3\cdot 5-2}{3\cdot 5-1}=\frac{13}{14}$

Ответ: $\frac{13}{14}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}=\frac{0}{\sqrt{5-0}-\sqrt{5+0}}=\frac{0}{\sqrt{5}-\sqrt{5}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$

умножим числитель и знаменатель на сопряженный знаменателю множитель $\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}$, а затем выполнив алгебраические преобразования, сократим дробь на x.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{(\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x})\cdot\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}= \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{(\sqrt{5-x})^2-(\sqrt{5+x})^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{(5-x)-(5+x)}= \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{5-x-5-x}= \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{-2x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{-2}=\frac{\sqrt{5-0}+\sqrt{5+0}}{-2}=-\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{2}==-\frac{2\sqrt{5}}{2}=-\sqrt{5}$$

Ответ: $-\sqrt{5}$.

5. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}=\frac{\sqrt{4+5}-3}{4-4}=\frac{\sqrt{9}-3}{0}=\frac{3-3}{0}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}=$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x+5})^2-3^2}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}==\lim_{x\to 4}\frac{x+5-9}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x+5}+3}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4+5}+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

Ответ: $\frac{1}{6}$.

6. $\lim\limits_{x\to 2}=\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\frac{1}{2-2}-\frac{4}{2^2-4}=\frac{1}{0}-\frac{4}{0}=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1\cdot(x+2)}{x-2}-\frac{4}{(x-2)(x+2)}\right)=$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+2-4}{(x-2)(x+2)}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Рассмотрим примеры предела функции при $x\to\infty$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{5x-1}$

При $x\to\infty$ числитель и знаменатель - величины бесконечно большие. Поэтому при непосредственном применении *теоремы №3* получим $\frac{\infty}{\infty}$, которое представляет собой неопределенность. Для вычисления предела этой функции нужно числитель и знаменатель разделить на x или x вынести за скобки.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{5x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x}+\frac{3}{x}}{\frac{5x}{x}-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{5-\frac{1}{x}}=\frac{2+\frac{3}{\infty}}{5-\frac{1}{\infty}}=\frac{2+0}{5-0}=\frac{2}{5}$$

Ответ: $\frac{2}{5}$.

8. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2+4}{5x-6x^3+3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$

Разделим числитель и знаменатель на наивысшую степень аргумента, т.е. на x^3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}+\frac{4}{x^3}}{\frac{5x}{x^3}-\frac{6x^3}{x^3}+\frac{3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^3}}{\frac{5}{x^2}-6+\frac{3}{x^3}}=\frac{1-\frac{2}{\infty}+\frac{4}{\infty}}{\frac{5}{\infty}-6+\frac{3}{\infty}}=\frac{1-0+0}{0-6+0}=-\frac{1}{6}$$

Ответ: $-\frac{1}{6}$.

Рассмотрим примеры с неопределенностью вида $[\infty-\infty]$.

9. $\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)$

При $x\to\infty$ функция представляет собой разность двух бесконечно больших величин $[\infty-\infty]$. Умножим и разделим функцию на одно и тоже (сопряженное) выражение $x+\sqrt{x^2-4x}$ и выполним преобразования, приводящие к формулам сокращенного умножения (разности квадратов).

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-4x})(x+\sqrt{x^2-4x})}{x+\sqrt{x^2-4x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(\sqrt{x^2-4x})^2}{x+\sqrt{x^2-4x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x^2-4x)}{x+\sqrt{x^2-4x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+4x}{x+\sqrt{x^2-4x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x+\sqrt{x^2-4x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x+\sqrt{x^2(1-\frac{4}{x})}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x+x\sqrt{1-\frac{4}{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x(1+\sqrt{1-\frac{4}{x}})}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x}}}=\frac{4}{1+\sqrt{1-\frac{4}{\infty}}}=\frac{4}{1+\sqrt{1-0}}=\frac{4}{1+1}=2$$

Ответ: 2.

<u>Упражнения.</u>

<u>Вычислить пределы:</u>

2.1. 1) $\lim_{x\to3}(x^3+x-5)$; 2) $\lim_{x\to-1}(x^3-x^2+1)$.

2.2. 1) $\lim_{x\to3}(2x^6-5x^2+x-4)$; 2) $\lim_{x\to0}(3x^2+x^2-8x+10)$.

2.3. 1) $\lim\limits_{x\to 1}((7x+2)\cdot(4x-3)\cdot(5x+1))$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}((x^2-1)\cdot(x-3)\cdot(x-5))$.

2.4. 1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+3)\cdot(x-2)}{x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$.

2.5. 1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3}{2x-6}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{3x^2+2x}$.

2.6. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3-2x^2}{5x^3-4x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+x}{x}$.

2.7. 1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$; 2) $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}}\dfrac{4x^2-9}{2x+3}$.

2.8. 1) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-25}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$.

2.9. 1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-8x+4}{5x^2-11x+8}$; 2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}$.

2.10. 1) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+x-15}{3x^2+7x-6}$; 2) $\lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}}\dfrac{3x^2+5x+2}{3x^2+8x+4}$.

2.11. 1) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.

2.12. 1) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6}{x^2-9}-\dfrac{11}{x-3}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{3}{x^3+1}-\dfrac{1}{x+1}\right)$.

2.13. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^2+3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)$.

2.14. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+1}{x^3+4x^2+2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{x-2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+4}{x^2+2x+3}$.

2.15. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-8}{2x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x^3+1}{x^3+2x^2+x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-x^2}{x^3+3x^2-1}$.

2.16. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x^6}{x^3+x^4}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+2x^2-1}{x^4-2x^3}$.

2.17. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)$.

2.18. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x+10}-\sqrt{x+20}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+5x}-\sqrt{2x^2-2x}\right)$.

2.19. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^4}{x^2+3}-3x^2\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\dfrac{3x^2}{3x^2+7}\right)$.

2.20. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3}{2x^2-x}-x\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4}{x^2-2}-\dfrac{x^4}{x^2+2}\right)$.